

4 Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу. Тогда, если произошло событие A , то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий H_1A, H_2A, \dots, H_nA . Следовательно,

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) \quad (14)$$

Эта формула называется **формулой полной вероятности**. События H_1, H_2, \dots, H_n часто называют «гипотезами».

Пример. В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех ламповых заводах: с 1-го завода 250 шт., со 2-го – 525 шт., с 3-го – 275 шт. и с 4-го – 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1500 часов, для 1-го завода равна 0,15, для 2-го – 0,30, для 3-го – 0,20, для 4-го – 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1500 часов?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что лампочка прогорит более 1500 часов, а H_1, H_2, H_3 и H_4 – гипотезы, что она изготовлена соответственно 1, 2, 3 или 4-м заводом. Так как всего лампочек 2000 шт., то вероятности гипотез соответственно равны:

$$P(H_1) = \frac{250}{2000} = 0,125; P(H_2) = \frac{525}{2000} = 0,2625; P(H_3) = \frac{275}{2000} = 0,1375$$

$$P(H_4) = \frac{950}{2000} = 0,475.$$

Далее, из условия задачи следует, что:

$$P_{H_1}(A) = 0,15; P_{H_2}(A) = 0,3; P_{H_3}(A) = 0,2; P_{H_4}(A) = 0,1.$$

Используя формулу полной вероятности (14), получаем:

$$P(A) = 0,125 \cdot 0,15 + 0,2625 \cdot 0,3 + 0,1375 \cdot 0,2 + 0,475 \cdot 0,1 = 0,1725$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Детали для обработки поступают из двух заготовительных цехов: из первого цеха – 70%, из второго – 30%, причем продукция первого цеха имеет 10% брака, а продукция второго цеха – 20% брака. Какова вероятность того, что случайно взятая деталь будет без дефектов?

2. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году будет равна 0,75, если экономика страны будет на подъеме; и эта же вероятность будет равна 0,3, если экономика страны не будет успешно развиваться. Вероятность экономического подъема в новом году равна 0,8. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году.

3. В университетской лаборатории имеется 6 вычислительных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения

некоторого расчета автомат не выйдет из строя равна 0,95, для полуавтомата – 0,8. Лаборант производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

5 Формула Байеса

Формула Байеса имеет вид:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)} \quad (15)$$

Пример 1. На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м и 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го – 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что взятый Подшипник нестандартный, а H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что он изготовлен соответственно 1-м, 2-м или 3-м заводом. Вероятности указанных гипотез составляют:

$$P(H_1) = \frac{200}{1000} = 0,2; \quad P(H_2) = \frac{460}{1000} = 0,46; \quad P(H_3) = \frac{340}{1000} = 0,34$$

Из условия задачи следует, что:

$$p_1 = P_{H_1}(A) = 0,03; \quad p_2 = P_{H_2}(A) = 0,02; \quad p_3 = P_{H_3}(A) = 0,01.$$

Найдем $P_A(H_1)$, т.е. вероятность того, что подшипник, оказавшийся нестандартным, изготовлен 1-м заводом. По формуле Байеса получаем:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)p_1}{P(H_1)p_1 + P(H_2)p_2 + P(H_3)p_3} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,2 \cdot 0,03 + 0,46 \cdot 0,02 + 0,34 \cdot 0,01} \approx 0,322$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он нестандартен.

Задачи для самостоятельного решения

1. У рыбака имеется 3 излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,5; на втором – 0,7; на третьем – 0,6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

2. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием H , 35% – с заболеванием X , 15% – с заболеванием Z . Вероятность полного излечения болезни H равна 0,7; для болезней X и Z вероятности излечения соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он страдал заболеванием H .

3. Из числа авиалиний аэропорта 60 % - местные, 30 % - по СНГ, 10 % - международные. Среди пассажиров местных авиалиний 50 % бизнесменов, на линиях СНГ таких пассажиров 60 %, на международных - 90 %. Чему равна вероятность, что случайно выбранный пассажир: а) бизнесмен, б) прибыл из стран СНГ, в) прибыл местным рейсом, г) прибыл международным рейсом?